

AB 12 · Zufallsgrößen und Binomialverteilung

Abi

Datum:

Kurz erklärt

Eine Zufallsgröße X ordnet jedem Ergebnis eine Zahl zu, etwa einen Gewinn oder die Anzahl der Treffer. Zählt man Treffer bei n unabhängigen Versuchen mit gleicher Trefferwahrscheinlichkeit p, ist X **binomialverteilt** – das häufigste Modell im Stochastik-Teil des Abiturs.

Zufallsgröße und Erwartungswert

- **Erwartungswert:** $E(X)=x_1\cdot P(X=x_1)+x_2\cdot P(X=x_2)+\ldots$ – der langfristige Mittelwert.
- **Faires Spiel:** Der Erwartungswert des Reingewinns (Auszahlung minus Einsatz) ist 0.
- **Streuung:** $Var(X)=\sum(x_i-\mu)^2\cdot P(X=x_i)$ und $\sigma=\sqrt{Var(X)}$.

Binomialverteilung

Voraussetzungen: n Versuche, jeweils nur Treffer oder Niete, Trefferwahrscheinlichkeit p bleibt gleich (Bernoulli-Kette).

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$: Anzahl der Pfade mit k Treffern. $\quad E(X)=n\cdot p, \quad \sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}$

Mindestens ein Treffer: $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-(1-p)^n$

Auftrag 1:

Erklären Sie sich gegenseitig in je einer Minute, wann man die Binomialverteilung verwenden darf. Nennen Sie je ein Beispiel, bei dem es passt, und eines, bei dem es nicht passt. Wer zuhört, achtet auf **zwei Ausgänge**, **gleiches** p und **unabhängig**.

★ *Pflicht · ca. 3 Min.*

Stufe 1 · Verstehen ■□□□

Starten Sie mit der Sprungaufgabe A. Fehlerfrei gelöst? Dann weiter mit Stufe 2 – sonst führen Sie die Beispiele zum Ziel.

Sprungaufgabe A:

a) Berechnen Sie $\binom{5}{2}$.

b) X ist $B(4;0{,}5)$-verteilt. Berechnen Sie $P(X=2)$.

c) Ein Glücksrad zahlt mit Wahrscheinlichkeit 0,1 genau 5 € und mit 0,3 genau 1 € aus, sonst nichts. Der Einsatz beträgt 1 €. Berechnen Sie den erwarteten Reingewinn.

Sprungtest · ca. 5 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 2

Beispiel 1 (vollständig):

Bei einem Würfelspiel zahlt man 2 € Einsatz. Bei einer Sechs bekommt man 6 € ausgezahlt, bei einer Fünf 3 €, sonst nichts. Ist das Spiel fair?

Reingewinn X: 4 € (Sechs), 1 € (Fünf), -2 € (sonst)

Wahrscheinlichkeiten: $P(X=4)=\frac{1}{6}$, $P(X=1)=\frac{1}{6}$, $P(X=-2)=\frac{4}{6}$

Erwartungswert: $E(X)=4\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{6}-2\cdot\frac{4}{6}=-\frac{3}{6}=-0,5$

Ergebnis: Im Mittel verliert man 0,50 € pro Spiel – das Spiel ist nicht fair.

Aufgabe 1 ★:

Einsatz 1 €. Zwei Münzen werden geworfen. Bei zweimal Kopf gibt es 3 €, bei einmal Kopf 1 €, sonst nichts.

a) Berechnen Sie den erwarteten Reingewinn wie in Beispiel 1.

b) Welche Auszahlung bei zweimal Kopf macht das Spiel fair?

★ *Pflicht · ca. 5 Min.*

Beispiel 2 (mit Lücken):

Ein Test hat 5 Fragen mit je 4 Antworten, von denen genau eine richtig ist. Jemand rät bei allen Fragen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau 2 Antworten richtig?

Treffer = richtig geraten: $n = 5$, $p =$ ____

Bernoulli-Formel: $P(X = 2) = (\ $ ____ über $2\ ) \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75\hat{}$ ____

Binomialkoeffizient: $(5$ über $2) =$ ____

Ergebnis: $P(X = 2) = 10 \cdot (1/16) \cdot (27/64) = 270/1024 \approx$ ____

Aufgabe 2 ★:

Ein Würfel wird viermal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für

a) genau eine Sechs,

b) keine Sechs.

★ *Pflicht · ca. 5 Min.*

Aufgabe 3 ★ – Fehler-Detektiv:

Finden Sie in jeder Aussage den Fehler, erklären Sie ihn und verbessern Sie. Vergleichen Sie danach mit Ihrem Partner.

a) $X \sim B(5;0,3)$: $P(X=2)=0,3^2\cdot 0,7^3$

b) $P(X\geq 1)=1-P(X=1)$

c) Drei Kugeln werden ohne Zurücklegen aus einer Urne gezogen; die Anzahl roter Kugeln ist binomialverteilt.

d) $\binom{6}{2}=12$

★ *Pflicht · ca. 6 Min.*

Stufe 2 · Anwenden ■■□□

Standardaufgaben ohne vorgegebene Schritte. Sprungaufgabe B fehlerfrei gelöst? Dann weiter mit Stufe 3.

Sprungaufgabe B:

X ist $B(10;0,2)$-verteilt. Mit Taschenrechner oder Tabelle:

a) Berechnen Sie $E(X)$ und σ.

b) Berechnen Sie $P(X\leq 1)$.

Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 3

Aufgabe 4 ★:

Ein Bauteil ist mit Wahrscheinlichkeit 5 % defekt. Eine Lieferung enthält 50 Bauteile. Verwenden Sie Taschenrechner oder Tabelle.

a) Wie viele defekte Bauteile erwartet man?

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass kein Bauteil defekt ist.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für höchstens zwei defekte Bauteile.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für mehr als drei defekte Bauteile.

★ Pflicht · ca. 10 Min.

Aufgabe 5 ★:

Wie oft muss man einen Würfel mindestens werfen, um mit mindestens 90 % Wahrscheinlichkeit mindestens eine Sechs zu erhalten?

★ Pflicht · ca. 7 Min.

Stufe 3 · Vernetzen

Sachzusammenhänge, Begründungen und Verbindungen zu anderen Themen. Sprungaufgabe C fehlerfrei? Dann weiter mit Stufe 4.

Sprungaufgabe C:

Begründen Sie, dass für $X \sim B(n;0,5)$ gilt: $P(X=k)=P(X=n-k)$.

Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 4

Aufgabe 6 ★:

Eine Fluggesellschaft weiß, dass 10 % der Gebuchten nicht zum Flug erscheinen. Für einen Flug mit 100 Plätzen verkauft sie 105 Tickets. Verwenden Sie den Taschenrechner.

a) Wie viele Passagiere erwartet man?

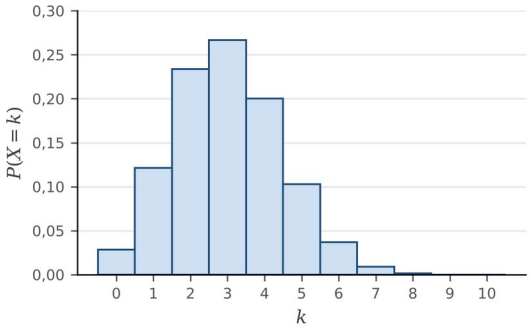
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheinen mehr Passagiere, als Plätze vorhanden sind?

c) Diskutieren Sie mit Ihrem Partner, ob die Binomialverteilung hier ein gutes Modell ist. Denken Sie an Familien und Reisegruppen.

★ Pflicht · ca. 10 Min.

Aufgabe 7 ★:

Die Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer $B(10;p)$-verteilten Zufallsgröße. Schätzen Sie p und begründen Sie.



★ Pflicht · ca. 4 Min.

Stufe 4 · Meistern

Abiturniveau, Teil A (ohne Hilfsmittel) – zur Differenzierung oder als Hausaufgabe.

Aufgabe 8:

Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n=4$ und Trefferwahrscheinlichkeit p.

a) Zeigen Sie, dass $P(X=1)=4\,p(1-p)^3$ gilt. (1 BE)

b) Berechnen Sie für $p=0{,}5$ die Wahrscheinlichkeit $P(X\geq 3)$. (2 BE)

c) Begründen Sie ohne Rechnung, dass für $p=0{,}5$ gilt: $P(X=0)=P(X=4)$. (1 BE)

d) Bestimmen Sie p so, dass $E(X)=3$ ist. (1 BE)

Differenzierung · ca. 10 Min. · Teil A, 5 BE

Zum Weiterdenken:

Beim Galtonbrett fällt eine Kugel durch 6 Reihen von Nägeln und wird jedes Mal mit Wahrscheinlichkeit 0,5 nach rechts abgelenkt. In welchem Fach landet sie am wahrscheinlichsten, und warum gibt es in der Mitte mehr Kugeln?