AB 11 · Wahrscheinlichkeiten

Abi

Datum:

Kurz erklärt

Fast jede Stochastik-Aufgabe beginnt mit einem Baumdiagramm oder einer Vierfeldertafel. Entscheidend ist, genau zu lesen: Ist die Wahrscheinlichkeit **für alle** gesucht oder nur **unter einer Bedingung**?

Pfadregeln

- **Produktregel:** Die Wahrscheinlichkeit eines Pfads ist das Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfads.
- **Summenregel:** Gehören mehrere Pfade zu einem Ereignis, addiert man ihre Wahrscheinlichkeiten.
- **Gegenereignis:** $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ – besonders bei „mindestens einmal“.

Vierfeldertafel und bedingte Wahrscheinlichkeit

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ – „Wahrscheinlichkeit von A **unter den** B“.

Unabhängigkeit: A und B sind stochastisch unabhängig, wenn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ gilt.

Auftrag 1:

Erklären Sie sich gegenseitig in je einer Minute den Unterschied zwischen „Die Person ist krank **und** positiv getestet“ und „Die Person ist krank, **wenn** sie positiv getestet wurde“. Wer zuhört, achtet auf die Schlüsselwörter **Schnitt**, **Bedingung** und **Anteil von**.

★ *Pflicht · ca. 3 Min.*

Stufe 1 · Verstehen ■□□□

Starten Sie mit der Sprungaufgabe A. Fehlerfrei gelöst? Dann weiter mit Stufe 2 – sonst führen Sie die Beispiele zum Ziel.

Sprungaufgabe A:

Aus einer Urne mit 3 roten und 2 blauen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln **ohne Zurücklegen** gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für:

a) beide rot

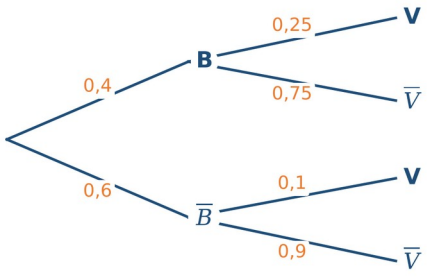
b) zwei verschiedene Farben

c) mindestens eine blaue Kugel

Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 2

Beispiel 1 (vollständig):

40 % der Schüler eines Jahrgangs fahren mit dem Bus (B). Von ihnen kommen 25 % manchmal zu spät (V), von den übrigen 10 %. Wie groß ist der Anteil der Busfahrer unter den Verspäteten?



Pfade zu V: $P(B \cap V) = 0,4 \cdot 0,25 = 0,1$; $P(\overline{B} \cap V) = 0,6 \cdot 0,1 = 0,06$

Summenregel: $P(V) = 0,1 + 0,06 = 0,16$

Bedingte Wahrscheinlichkeit: $P_V(B) = \frac{P(B \cap V)}{P(V)} = \frac{0,1}{0,16} = 0,625$

Ergebnis: 62,5 % der Verspäteten fahren mit dem Bus.

Aufgabe 1 ★:

30 % der Kunden eines Shops nutzen die App (A). Von den App-Nutzern bewerten 80 % den Shop positiv (P), von den übrigen Kunden 50 %. Berechnen Sie wie in Beispiel 1 $P(P)$ und $P_P(A)$.

★ *Pflicht · ca. 5 Min.*

Beispiel 2 (mit Lücken):

Es gilt $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,4$ und $P(A \cap B) = 0,2$. Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel und prüfen Sie auf Unabhängigkeit.

	B	$\overline{B}$	
A	0,2		0,3
$\overline{A}$			
	0,4		1

Unabhängig? $P(A) \cdot P(B) = 0,3 \cdot 0,4 =$ ____ $\neq$ $0,2$ $\Rightarrow$ A und B sind ____.

Aufgabe 2 ★:

Es gilt $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,6$ und $P(A \cap \overline{B}) = 0,1$. Erstellen Sie die Vierfeldertafel, berechnen Sie $P_A(B)$ und prüfen Sie auf Unabhängigkeit.

★ *Pflicht · ca. 5 Min.*

Aufgabe 3 ★ – Fehler-Detektiv:

Finden Sie in jeder Aussage den Fehler, erklären Sie ihn und verbessern Sie. Vergleichen Sie danach mit Ihrem Partner.

a) Zweimal würfeln: $P(\text{zwei Sechsen}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

b) Zweimal würfeln: $P(\text{mindestens eine Sechs}) = \frac{2}{6}$

c) $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

d) Unvereinbare Ereignisse mit positiven Wahrscheinlichkeiten sind unabhängig.

★ *Pflicht · ca. 6 Min.*

Stufe 2 · Anwenden ■■□□

Standardaufgaben ohne vorgegebene Schritte. Sprungaufgabe B fehlerfrei gelöst? Dann weiter mit Stufe 3.

Sprungaufgabe B:

10 % einer Gruppe sind krank. Ein Test erkennt 90 % der Kranken; von den Gesunden werden 20 % fälschlich positiv getestet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine positiv getestete Person krank ist?

Sprungtest · ca. 5 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 3

Aufgabe 4 ★:

Ein Basketballspieler trifft beim ersten Freiwurf mit 70 %. Nach einem Treffer trifft er beim zweiten mit 80 %, nach einem Fehlwurf nur mit 50 %.

a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für zwei Treffer.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für genau einen Treffer.

d) Der zweite Wurf war ein Treffer. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war auch der erste ein Treffer?

★ *Pflicht · ca. 10 Min.*

Aufgabe 5 ★:

An einer Schule mit 800 Schülerinnen und Schülern spielen 300 ein Instrument (I), 450 treiben Vereinssport (S) und 150 tun beides.

a) Erstellen Sie eine Vierfeldertafel mit absoluten Zahlen.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit macht eine zufällig gewählte Person weder das eine noch das andere?

c) Berechnen Sie $P_S(I)$ und beschreiben Sie die Bedeutung in Worten.

d) Sind I und S stochastisch unabhängig?

★ *Pflicht · ca. 8 Min.*

Stufe 3 · Vernetzen ■■■□

Sachzusammenhänge, Begründungen und Verbindungen zu anderen Themen. Sprungaufgabe C fehlerfrei? Dann weiter mit Stufe 4.

Sprungaufgabe C:

Zeigen Sie: Sind A und B unabhängig, so sind auch A und $\overline{B}$ unabhängig.

Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 4

Aufgabe 6 ★:

Laut einer Studie nutzen 60 % der Jugendlichen täglich soziale Medien (T). Von ihnen schlafen 75 % weniger als 8 Stunden (S), von den übrigen 40 %.

a) Berechnen Sie $P(S)$.

b) Berechnen Sie $P_S(T)$.

c) Eine Zeitung schreibt: „75 % der Kurzschläfer nutzen täglich soziale Medien.“ Erklären Sie Ihrem Partner den Fehler. Ihr Partner formuliert die Aussage richtig.

★ *Pflicht · ca. 9 Min.*

Aufgabe 7 ★:

A und B sind unabhängig mit $P(A)=0,4$ und $P(B)=0,5$. Berechnen Sie $P(A \cup B)$.

★ *Pflicht · ca. 4 Min.*

Stufe 4 · Meistern

Abiturniveau, Teil A (ohne Hilfsmittel) – zur Differenzierung oder als Hausaufgabe.

Aufgabe 8:

Für zwei Ereignisse A und B gilt: $P(A)=0,4$, $P_A(B)=0,5$ und $P(B)=0,6$.

a) Erstellen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel. (3 BE)

b) Untersuchen Sie A und B auf stochastische Unabhängigkeit. (1 BE)

c) Berechnen Sie $P_B(A)$. (1 BE)

Differenzierung · ca. 10 Min. · Teil A, 5 BE

Zum Weiterdenken:

Ziegenproblem: Hinter einer von drei Türen steht ein Auto, hinter den anderen Ziegen. Sie wählen eine Tür. Der Moderator öffnet eine andere Tür mit einer Ziege und bietet an zu wechseln. Lohnt sich der Wechsel?