

# AB 10 · Geraden und Ebenen

Abi

Datum:

## Kurz erklärt

In jeder Geometrieaufgabe des Abiturs kommt eine Ebenengleichung vor. Die **Koordinatenform** ist dabei am praktischsten: Man liest den Normalenvektor ab und kann Punkte und Geraden direkt einsetzen.

### Darstellungen

- **Gerade:** $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ ($\vec{A}$: Aufpunkt, $\vec{u}$: Richtungsvektor)
- **Ebene (Parameterform):** $E: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$
- **Ebene (Koordinatenform):** $E: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = d$ mit Normalenvektor $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ und $d = \vec{n} \circ \vec{A}$
- **Spurpunkte:** zwei Koordinaten null setzen, z. B. $S_1(x_1 \mid 0 \mid 0)$.

### Lagebeziehungen

- **Gerade und Ebene:** $g$ in die Koordinatenform einsetzen. Genau eine Lösung → Schnittpunkt; Widerspruch → parallel; wahre Aussage → $g$ liegt in $E$. Schnelltest: $\vec{u} \circ \vec{n} = 0$ → parallel oder in $E$.
- **Zwei Geraden:** Richtungsvektoren Vielfache → parallel oder identisch (Punktprobe). Sonst gleichsetzen: Lösung → Schnittpunkt, keine Lösung → windschief.

### Auftrag 1:

Erklären Sie sich gegenseitig in je einer Minute, wie man aus drei Punkten die Koordinatenform einer Ebene erhält. Wer zuhört, achtet auf die Schlüsselwörter **Spannvektoren**, **Vektorprodukt** und **Punkt einsetzen**.

★ *Pflicht · ca. 3 Min.*

## Stufe 1 · Verstehen ■□□□

*Starten Sie mit der Sprungaufgabe A. Fehlerfrei gelöst? Dann weiter mit Stufe 2 – sonst führen Sie die Beispiele zum Ziel.*

### Sprungaufgabe A:

a) Geben Sie eine Gleichung der Geraden $g$ durch $A(1 \mid 0 \mid 2)$ und $B(3 \mid 1 \mid 0)$ an.

b) Prüfen Sie, ob $P(5 \mid 2 \mid -2)$ auf $g$ liegt.

c) Bestimmen Sie die Spurpunkte der Ebene $E: 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 8$.

*Sprungtest · ca. 5 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 2*

### Beispiel 1 (vollständig):

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene durch $A(1 \mid 0 \mid 0)$, $B(0 \mid 2 \mid 0)$, $C(0 \mid 0 \mid 3)$ in Koordinatenform.

Spannvektoren: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Normalenvektor: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Punkt $A$ einsetzen: $d = 6 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 6$

**Ergebnis:** $E: 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$. Probe mit $B$: $6$ ✓, mit $C$: $6$ ✓

### Aufgabe 1 ★:

Bestimmen Sie wie in Beispiel 1 eine Ebenengleichung in Koordinatenform.

a) $A(2|0|0), B(0|4|0), C(0|0|4)$

b) $A(1|1|1), B(2|1|0), C(1|3|2)$

*★ Pflicht · ca. 6 Min.*

### Beispiel 2 (mit Lücken):

Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ mit der Ebene $E: x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$.

g einsetzen: $(1 + \lambda) + 2 \cdot \quad + 1 = 8$

vereinfachen: $3\lambda + 2 = 8 \quad \Rightarrow \quad \lambda =$

$\lambda$ in g einsetzen: S( | 2 | 1 )

Probe: $3 + 4 + 1 = 8$ ✓

### Aufgabe 2 ★:

Berechnen Sie den Schnittpunkt von $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ mit $E: 2x_1 - x_2 + x_3 = 11$.

*★ Pflicht · ca. 4 Min.*

### Aufgabe 3 ★ – Fehler-Detektiv:

Finden Sie in jeder Zeile den Fehler, erklären Sie ihn und verbessern Sie. Vergleichen Sie danach mit Ihrem Partner.

a) Spurpunkt von $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8$ auf der $x_2$-Achse: $(0|8|0)$

b) $\vec{u} \circ \vec{n} = 0$, also schneidet $g$ die Ebene $E$.

c) Ebene durch $A(1|1|1)$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

d) $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$, also sind $g_1$ und $g_2$ identisch.

*★ Pflicht · ca. 6 Min.*

## Stufe 2 · Anwenden ■■□□

*Standardaufgaben ohne vorgegebene Schritte. Sprungaufgabe B fehlerfrei gelöst? Dann weiter mit Stufe 3.*

### Sprungaufgabe B:

Untersuchen Sie die Lage von $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ und $E: x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$.

*Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 3*

### Aufgabe 4 ★:

Untersuchen Sie die Lage der Geraden $g$ und $h$. Berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $h: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

b) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $h: \vec{X} = \begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$

c) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $h: \vec{X} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

★ *Pflicht · ca. 10 Min.*

### Aufgabe 5 ★:

Gegeben ist $E: \vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie eine Koordinatenform von $E$.

b) Bestimmen Sie die Spurpunkte.

★ *Pflicht · ca. 6 Min.*

## Stufe 3 · Vernetzen ■■■□

*Sachzusammenhänge, Begründungen und Verbindungen zu anderen Themen. Sprungaufgabe C fehlerfrei? Dann weiter mit Stufe 4.*

### Sprungaufgabe C:

Für welches $a$ liegt $P(a\,|\,2\,|\,1)$ in der Ebene $E: 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7$?

*Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 4*

### Aufgabe 6 ★:

Ein Sonnensegel liegt in der Ebene $E: x_1 + x_2 + 4x_3 = 12$ (1 LE = 1 m, $x_1x_2$-Ebene = Boden). Ein Mast steht senkrecht im Bodenpunkt $F(1\,|\,1\,|\,0)$ und reicht genau bis zum Segel.

a) Berechnen Sie die Länge des Masts.

b) Die Ecke $P(2\,|\,2\,|\,2)$ des Segels wirft bei Sonnenlicht in Richtung $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ einen Schatten auf den Boden. Bestimmen Sie den Schattenpunkt.

c) Erklären Sie Ihrem Partner, was die Spurgerade der Ebene $E$ in der $x_1x_2$-Ebene im Sachzusammenhang bedeutet.

★ *Pflicht · ca. 10 Min.*

### Aufgabe 7 ★:

Geben Sie eine Gleichung der Ebene an, die parallel zu $E: x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4$ ist und durch $P(1\,|\,1\,|\,1)$ verläuft.

★ *Pflicht · ca. 3 Min.*

## Stufe 4 · Meistern

*Abiturniveau, Teil A (ohne Hilfsmittel) – zur Differenzierung oder als Hausaufgabe.*

### Aufgabe 8:

Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$ und der Punkt $P(1|1|1)$.

a) Bestimmen Sie die Spurpunkte von $E$. (2 BE)

b) Zeigen Sie, dass die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ die Ebene $E$ in genau einem Punkt schneidet, und geben Sie diesen an. (2 BE)

c) Die Gerade $h$ verläuft durch $P$ und steht senkrecht auf $E$. Bestimmen Sie den Schnittpunkt $F$ von $h$ und $E$. (3 BE)

*Differenzierung · ca. 15 Min. · Teil A, 7 BE*

### Zum Weiterdenken:

Wie viele Ebenen enthalten eine gegebene Gerade? Wie viele Ebenen enthalten eine Gerade und einen Punkt, der nicht auf ihr liegt?