

AB 9 · Vektoren im Raum

Abi

Datum:

Kurz erklärt

Vektoren beschreiben Verschiebungen im Raum. Mit wenigen Werkzeugen berechnen Sie im Abitur Längen, Winkel, Flächen und Normalenvektoren. Merke: **Spitze minus Fuß**.

Grundlagen

- **Verbindungsvektor:** $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$ **Länge:** $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ **Mittelpunkt:** $M = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})$
- **Skalarprodukt:** $\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$; $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$
- **Winkel:** $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Vektorprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (Normalenvektor). $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ist der Flächeninhalt des Parallelogramms, die Hälfte davon der des Dreiecks.

Auftrag 1:

Erklären Sie sich gegenseitig in je einer Minute, warum $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$ gilt und wie man mit dem Skalarprodukt einen rechten Winkel nachweist. Wer zuhört, achtet auf die Schlüsselwörter **Spitze minus Fuß** und **Skalarprodukt null**.

★ *Pflicht · ca. 3 Min.*

Stufe 1 · Verstehen ■□□□

Starten Sie mit der Sprungaufgabe A. Fehlerfrei gelöst? Dann weiter mit Stufe 2 – sonst führen Sie die Beispiele zum Ziel.

Sprungaufgabe A:

Gegeben sind $A(1|2|3)$ und $B(3|1|5)$.

a) Berechnen Sie $\overrightarrow{AB}$.

b) Berechnen Sie $|\overrightarrow{AB}|$.

c) Geben Sie den Mittelpunkt von $[AB]$ an.

d) Prüfen Sie, ob $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ senkrecht sind.

Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 2

Beispiel 1 (vollständig):

Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC mit $A(1|0|2)$, $B(3|1|4)$ und $C(-1|2|3)$ bei A rechtwinklig ist, und berechnen Sie seinen Flächeninhalt.

Vektoren: $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$

Skalarprodukt: $\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}=-4+2+2=0$ → rechter Winkel bei A

Längen: $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{9}=3$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{9}=3$

Ergebnis: $A_{\Delta}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3=4{,}5$ FE

Aufgabe 1 ★:

Zeigen Sie wie in Beispiel 1, dass das Dreieck mit $A(2|1|0)$, $B(4|2|2)$, $C(3|-1|0)$ bei A rechtwinklig ist, und berechnen Sie den Flächeninhalt.

★ Pflicht · ca. 5 Min.

Beispiel 2 (mit Lücken):

Berechnen Sie $\vec{a}\times\vec{b}$ für $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$.

1. Komponente: $2\cdot 3-0\cdot 1=$
2. Komponente: $0\cdot 0-1\cdot 3=$
3. Komponente: $1\cdot 1-2\cdot 0=$

Probe: $(1,2,0)\circ(6,-3,1)=6-6+0=$ ✓

Aufgabe 2 ★:

Berechnen Sie $\vec{a}\times\vec{b}$ für $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$, machen Sie die Probe und geben Sie den Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms an.

★ Pflicht · ca. 5 Min.

Aufgabe 3 ★ – Fehler-Detektiv:

Finden Sie in jeder Zeile den Fehler, erklären Sie ihn und verbessern Sie. Vergleichen Sie danach mit Ihrem Partner.

a) $A(1|2|3)$, $B(4|0|3)$: $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$

b) $\left|\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right|=1+2+2=5$

c) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$

d) $\cos\varphi=0$, also $\varphi=0^{\circ}$

★ Pflicht · ca. 6 Min.

Stufe 2 · Anwenden ■■□□

Standardaufgaben ohne vorgegebene Schritte. Sprungaufgabe B fehlerfrei gelöst? Dann weiter mit Stufe 3.

Sprungaufgabe B:

Gegeben sind $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Ecken O, $P(1|0|1)$ und $Q(0|1|1)$.

Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 3

Aufgabe 4 ★:

Gegeben sind $A(1|1|0)$, $B(5|1|0)$ und $C(6|4|2)$.

a) Bestimmen Sie D so, dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

b) Prüfen Sie, ob $ABCD$ ein Rechteck ist.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms.

★ Pflicht · ca. 10 Min.

Aufgabe 5 ★:

a) Bestimmen Sie einen Vektor der Länge 1, der senkrecht auf $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ steht.

b) Für welches t stehen $\begin{pmatrix}t\\2\\-1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}3\\t\\4\end{pmatrix}$ senkrecht aufeinander?

★ Pflicht · ca. 6 Min.

Stufe 3 · Vernetzen

Sachzusammenhänge, Begründungen und Verbindungen zu anderen Themen. Sprungaufgabe C fehlerfrei? Dann weiter mit Stufe 4.

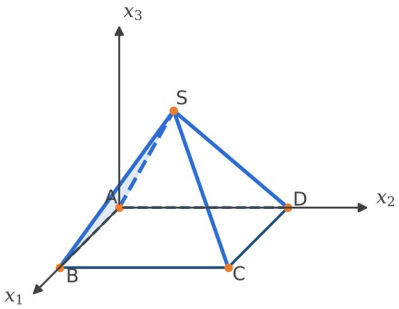
Sprungaufgabe C:

Zeigen Sie, dass $A(1|2|3)$, $B(2|4|4)$ und $C(4|8|6)$ auf einer Geraden liegen.

Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 4

Aufgabe 6 ★:

Ein Zeltdach hat die Form einer Pyramide mit der quadratischen Grundfläche $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$, $C(4|4|0)$, $D(0|4|0)$ und der Spitze $S(2|2|3)$ (1 LE = 1 m).



a) Berechnen Sie die Länge der Kante $[AS]$.

b) Wie viel Zeltstoff braucht man für die vier Dachflächen?

c) Mit Taschenrechner: Berechnen Sie gemeinsam mit Ihrem Partner den Winkel zwischen der Kante $[AS]$ und der Grundfläche. Tipp: Vergleichen Sie $\overrightarrow{AS}$ mit $\overrightarrow{AM}$, wobei $M(2|2|0)$ der Mittelpunkt der Grundfläche ist.

★ Pflicht · ca. 10 Min.

Aufgabe 7 ★:

Spiegeln Sie den Punkt $P(1|2|3)$ am Punkt $Z(2|0|1)$.

★ Pflicht · ca. 3 Min.

Stufe 4 · Meistern

Abiturniveau, Teil A (ohne Hilfsmittel) – zur Differenzierung oder als Hausaufgabe.

Aufgabe 8:

Gegeben sind die Punkte $A(2|0|0)$, $B(0|2|0)$ und $C(0|0|2)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist. (2 BE)

b) Bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht auf der Ebene durch A, B und C steht. (2 BE)

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC. (2 BE)

Differenzierung · ca. 12 Min. · Teil A, 6 BE

Zum Weiterdenken:

Das Volumen eines Spats (schiefer Quader) mit den Kantenvektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ist $V = \left|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}\right|$. Begründen Sie diese Formel mit „Grundfläche mal Höhe“.