

AB 8 · Stammfunktionen und Integrale

Abi

Datum:

Kurz erklärt

Eine Stammfunktion F von f ist eine Funktion mit $F'=f$ – Integrieren ist also Ableiten rückwärts. Mit dem Hauptsatz berechnen Sie daraus Integrale, Flächen und Bestände. Machen Sie immer die **Probe durch Ableiten**.

Stammfunktionen

$f(x)$	$x^n\,(n\neq -1)$	$\frac{1}{x}$	e^x	$\sin x$	$\cos x$	$f(ax+b)$
$F(x)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	e^x	$-\cos x$	$\sin x$	$\frac{1}{a}F(ax+b)$

Hauptsatz und Flächen

- **Hauptsatz:** $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$
- **Fläche zwischen Graph und x-Achse:** zuerst Nullstellen bestimmen; Flächenstücke unterhalb der x-Achse liefern negative Integrale – Beträge addieren.
- **Fläche zwischen zwei Graphen:** Schnittstellen bestimmen, dann $A=\left|\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx\right|$ je Teilstück.
- **Im Sachkontext:** Integral einer Änderungsrate = Gesamtänderung des Bestands.

Auftrag 1:

Erklären Sie sich gegenseitig in je einer Minute, warum $\int_{-1}^{1} x^3\,dx=0$ ist, obwohl der Graph mit der x-Achse zwei Flächenstücke einschließt. Wer zuhört, achtet auf die Schlüsselwörter **unterhalb**, **negativ** und **Betrag**.

★ *Pflicht · ca. 3 Min.*

Stufe 1 · Verstehen ■□□□

Starten Sie mit der Sprungaufgabe A. Fehlerfrei gelöst? Dann weiter mit Stufe 2 – sonst führen Sie die Beispiele zum Ziel.

Sprungaufgabe A:

a) Geben Sie eine Stammfunktion von $f(x)=3x^2-4x+1$ an.

b) Geben Sie eine Stammfunktion von $g(x)=e^{2x}$ an.

c) Berechnen Sie $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$.

d) Berechnen Sie $\int_0^1 (2x+1)\,dx$.

Sprungtest · ca. 5 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 2

Beispiel 1 (vollständig):

Berechnen Sie $\int_0^2 (x^3 - x)\,dx$.

Stammfunktion: $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$ (Probe: $F'(x) = x^3 - x$ ✓)

Obere Grenze: $F(2) = 4 - 2 = 2$

Untere Grenze: $F(0) = 0$

Ergebnis: $\int_0^2 (x^3 - x)\,dx = F(2) - F(0) = 2$

Aufgabe 1 ★:

Berechnen Sie wie in Beispiel 1.

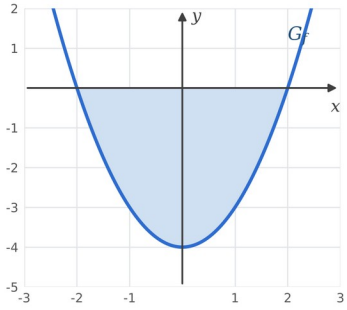
a) $\int_1^3 (x^2 - 2x)\,dx$

b) $\int_0^1 4e^{2x}\,dx$

★ *Pflicht · ca. 5 Min.*

Beispiel 2 (mit Lücken):

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von $f(x) = x^2 - 4$ mit der x-Achse einschließt.



Nullstellen: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = $ ____

Stammfunktion: $F(x) = $ ____

Integral: $F(2) - F(-2) = -16/3 - $ ____ $= -32/3$

Fläche: $A = $ ____ FE (die Fläche liegt unterhalb der x-Achse)

Aufgabe 2 ★:

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von $f(x) = -x^2 + 2x$ mit der x-Achse einschließt.

★ *Pflicht · ca. 4 Min.*

Aufgabe 3 ★ – Fehler-Detektiv:

Finden Sie in jeder Zeile den Fehler, erklären Sie ihn und verbessern Sie. Vergleichen Sie danach mit Ihrem Partner.

a) Stammfunktion von e^{3x} ist $3e^{3x}$.

b) Stammfunktion von $\frac{1}{x^2}$ ist $\ln(x^2)$.

c) Die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x) = x$ und der x-Achse über $[-1;2]$ ist $\int_{-1}^2 x\,dx = \frac{3}{2}$.

d) Stammfunktion von $(2x+1)^3$ ist $\frac{1}{4}(2x+1)^4$.

★ *Pflicht · ca. 6 Min.*

Stufe 2 · Anwenden ■■□□

Standardaufgaben ohne vorgegebene Schritte. Sprungaufgabe B fehlerfrei gelöst? Dann weiter mit Stufe 3.

Sprungaufgabe B:

a) Berechnen Sie $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$.

b) Berechnen Sie die Fläche zwischen den Graphen von $f(x)=x^2$ und $g(x)=x$.

Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 3

Aufgabe 4 ★:

Geben Sie jeweils eine Stammfunktion an.

a) $f(x)=\frac{2}{x^3}$

b) $f(x)=\sqrt{x}$

c) $f(x)=\frac{1}{x}+e^{-x}$

d) $f(x)=(3x-2)^4$

e) $f(x)=\cos(2x)$

f) $f(x)=\frac{1}{2x+1}$ $(x>-\frac{1}{2})$

★ *Pflicht · ca. 8 Min.*

Aufgabe 5 ★:

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von $f(x)=x^3-4x$ mit der x-Achse einschließt. Nutzen Sie die Symmetrie.

★ *Pflicht · ca. 7 Min.*

Stufe 3 · Vernetzen ■■■□

Sachzusammenhänge, Begründungen und Verbindungen zu anderen Themen. Sprungaufgabe C fehlerfrei? Dann weiter mit Stufe 4.

Sprungaufgabe C:

Zeigen Sie, dass $F(x)=x\cdot e^x-e^x$ eine Stammfunktion von $f(x)=x\cdot e^x$ ist.

Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 4

Aufgabe 6 ★:

Die Zuflussrate in ein Becken ist $r(t)=-3t^2+12t$ für $0\le t\le 4$ (t in h, r in m³/h).

a) Wann ist die Zuflussrate am größten, und wie groß ist sie dann?

b) Wie viel Wasser fließt in den vier Stunden insgesamt zu?

c) Zu Beginn sind 10 m³ im Becken. Stellen Sie gemeinsam mit Ihrem Partner einen Term für die Wassermenge $V(t)$ auf und erklären Sie sich gegenseitig, warum das Integral die Zunahme liefert.

★ *Pflicht · ca. 9 Min.*

Aufgabe 7 ★:

Bestimmen Sie $a>0$ so, dass $\int_0^{a} 2x \, dx=9$ gilt.

★ *Pflicht · ca. 3 Min.*

Stufe 4 · Meistern

Abiturniveau, Teil A (ohne Hilfsmittel) – zur Differenzierung oder als Hausaufgabe.

Aufgabe 8:

Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ und g mit $g(x)=x+4$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f und g. (3 BE)

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die die Graphen von f und g einschließen. (4 BE)

c) Begründen Sie ohne Rechnung, dass $\int_{-2}^{4}(g(x)-f(x))\,dx>0$ ist. (1 BE)

Differenzierung · ca. 15 Min. · Teil A, 8 BE

Zum Weiterdenken:

Warum hat $\int_{1}^{z}\frac{1}{x^2}\,dx$ für $z\to\infty$ einen endlichen Grenzwert, $\int_{1}^{z}\frac{1}{x}\,dx$ aber nicht?