

# AB 7 · Ableitungen anwenden

Datum:

Abi

## Kurz erklärt

Die Ableitung $f'(x)$ gibt die **Steigung** des Graphen von $f$ an der Stelle $x$ an. Damit beantworten Sie die Standardfragen jeder Funktionsuntersuchung: Wo steigt der Graph? Wo hat er Hoch- und Tiefpunkte? Wo ändert er seine Krümmung?

### Tangente

Tangente an den Graphen von $f$ im Punkt $(x_0 \mid f(x_0))$:

$$t: y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

### Monotonie, Extrem- und Wendepunkte

- $f'(x) > 0 \rightarrow$ Graph steigt; $f'(x) < 0 \rightarrow$ Graph fällt.
- **Extremstelle:** $f'(x_0) = 0$ **und** Vorzeichenwechsel von $f'$: + nach − → Hochpunkt, − nach + → Tiefpunkt.
  Alternativ: $f''(x_0) < 0 \rightarrow$ Hochpunkt, $f''(x_0) > 0 \rightarrow$ Tiefpunkt.
- **Wendestelle:** $f''(x_0) = 0$ **und** Vorzeichenwechsel von $f''$ (der Graph wechselt die Krümmung).
- **Graph von $f'$ lesen:** Nullstellen von $f'$ mit VZW = Extremstellen von $f$; Extremstellen von $f'$ = Wendestellen von $f$.

### Auftrag 1:

Erklären Sie sich gegenseitig in je einer Minute am Beispiel $f(x) = x^3$, warum $f'(x_0) = 0$ allein noch keinen Hoch- oder Tiefpunkt garantiert. Wer zuhört, achtet auf die Schlüsselwörter **notwendig**, **hinreichend** und **Vorzeichenwechsel**.

★ *Pflicht · ca. 3 Min.*

## Stufe 1 · Verstehen ■□□□

*Starten Sie mit der Sprungaufgabe A. Fehlerfrei gelöst? Dann weiter mit Stufe 2 – sonst führen Sie die Beispiele zum Ziel.*

### Sprungaufgabe A:

Gegeben ist $f(x) = x^3 - 3x$.

a) Bestimmen Sie die Tangente an den Graphen bei $x = 2$.

b) Bestimmen Sie die Extrempunkte.

c) Bestimmen Sie den Wendepunkt.

*Sprungtest · ca. 6 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 2*

### Beispiel 1 (vollständig):

Untersuchen Sie $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ auf Extrem- und Wendepunkte.

Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$, $f''(x) = 6x - 12$

Extremstellen: $f'(x) = 0$ für $x = 1$ und $x = 3$

Art: $f''(1) = -6 < 0 \rightarrow$ Hochpunkt $H(1 \mid 4)$; $f''(3) = 6 > 0 \rightarrow$ Tiefpunkt $T(3 \mid 0)$

Wendestelle: $f''(x) = 0$ für $x = 2$, VZW von $f'' \rightarrow W(2 \mid 2)$

**Monotonie:** steigend für $x \leq 1$ und $x \geq 3$, fallend für $1 \leq x \leq 3$.

### Aufgabe 1 ★:

Untersuchen Sie $f(x)=x^3+3x^2-9x+1$ wie in Beispiel 1 auf Extrem- und Wendepunkte und geben Sie das Monotonieverhalten an.

*★ Pflicht · ca. 6 Min.*

### Beispiel 2 (mit Lücken):

Bestimmen Sie die Tangente an den Graphen von $f(x)=x^2-2x+3$ im Punkt mit $x_0=2$.

Funktionswert: $f(2) =$ ____

Ableitung: $f'(x) =$ ____, also $f'(2) = 2$

Einsetzen: $y =$ ____ $\cdot (x-2)+3 =$ ____

### Aufgabe 2 ★:

Bestimmen Sie die Tangentengleichung.

a) $f(x)=\frac{1}{x}$ bei $x_0=1$

b) $g(x)=e^x$ bei $x_0=0$

*★ Pflicht · ca. 4 Min.*

### Aufgabe 3 ★ – Fehler-Detektiv:

Finden Sie den Fehler in jeder Aussage, erklären Sie ihn und verbessern Sie. Vergleichen Sie danach mit Ihrem Partner.

a) „$f'(2)=0$, also hat der Graph bei $x=2$ einen Hochpunkt."

b) „$f''(1)=-3<0$, also ist $f$ bei $x=1$ streng monoton fallend."

c) „Die Tangente an $f(x)=x^2$ bei $x_0=3$ ist $y=6x$."

d) „Die Nullstellen von $f'$ sind die Nullstellen von $f$."

*★ Pflicht · ca. 6 Min.*

## Stufe 2 · Anwenden ■■□□

*Standardaufgaben ohne vorgegebene Schritte. Sprungaufgabe B fehlerfrei gelöst? Dann weiter mit Stufe 3.*

### Sprungaufgabe B:

Untersuchen Sie $f(x)=x\cdot e^{-x}$ auf Extrem- und Wendepunkte.

*Sprungtest · ca. 5 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 3*

### Aufgabe 4 ★:

Gegeben ist $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^2$.

a) Bestimmen Sie die Extrempunkte.

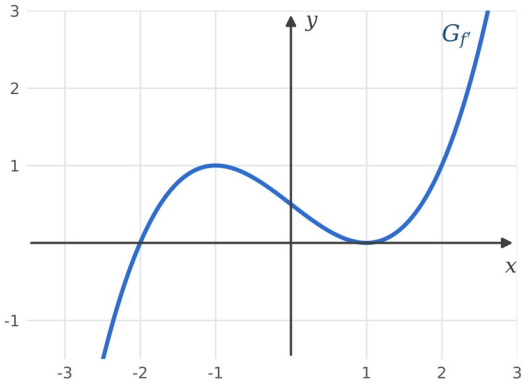
b) Bestimmen Sie die Wendepunkte.

c) Geben Sie das Monotonieverhalten an.

*★ Pflicht · ca. 10 Min.*

### Aufgabe 5 ★:

Die Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion $f'$ einer Funktion $f$.




a) Geben Sie die Extremstelle von $f$ und ihre Art an.

b) Geben Sie das Monotonieverhalten von $f$ an.

c) Geben Sie die Wendestellen von $f$ an.

d) Erklären Sie Ihrem Partner, warum $f$ bei $x=1$ weder einen Hoch- noch einen Tiefpunkt hat.

*★ Pflicht · ca. 8 Min.*

## Stufe 3 · Vernetzen

*Sachzusammenhänge, Begründungen und Verbindungen zu anderen Themen. Sprungaufgabe C fehlerfrei? Dann weiter mit Stufe 4.*

### Sprungaufgabe C:

Für welche Werte von $a$ hat $f(x)=x^3-a\,x$ zwei Extremstellen?

*Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 4*

### Aufgabe 6 ★:

Die Wassermenge in einem Speicher wird für $0\le t\le 6$ beschrieben durch $V(t)=-t^3+6t^2+15$ ($t$ in h, $V$ in m³).

a) Zu welchem Zeitpunkt nimmt die Wassermenge am stärksten zu? Wie groß ist die Zunahme dann?

b) Wann ist die Wassermenge am größten? Wie viel Wasser ist dann im Speicher?

c) Erklären Sie Ihrem Partner, was die Wendestelle von $V$ im Sachzusammenhang bedeutet.

*★ Pflicht · ca. 10 Min.*

### Aufgabe 7 ★:

In welchen Punkten ist die Tangente an den Graphen von $f(x)=x^3$ parallel zur Geraden $y=12\,x+1$?

*★ Pflicht · ca. 4 Min.*

## Stufe 4 · Meistern

*Abiturniveau, Teil A (ohne Hilfsmittel) – zur Differenzierung oder als Hausaufgabe.*

### Aufgabe 8:

Gegeben ist die Funktion $f$ mit $f(x)=x^4-4\,x^3$, $x\in R$.

a) Bestimmen Sie Lage und Art der Punkte mit waagrechter Tangente. (4 BE)

b) Zeigen Sie, dass der Graph von $f$ bei $x=0$ und $x=2$ Wendepunkte hat. (2 BE)

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Wendepunkt bei $x=2$. (2 BE)

*Differenzierung · ca. 15 Min. · Teil A, 8 BE*

### Zum Weiterdenken:

Hat der Graph jeder ganzrationalen Funktion dritten Grades genau einen Wendepunkt? Begründen Sie.