

AB 6 · Ableiten

Datum:

Abi

Kurz erklärt

Ohne sicheres Ableiten geht im Abitur keine Funktionsuntersuchung. Erkennen Sie zuerst die **Struktur** des Terms (Summe, Produkt, Verkettung) – daraus folgt die Regel. Brüche und Wurzeln schreiben Sie vorher als Potenzen.

Grundableitungen

$f(x)$	x^n	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}$	e^x	$\ln x$	$\sin x$	$\cos x$
$f'(x)$	$n \cdot x^{n-1}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{x^2}$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\cos x$	$-\sin x$

Ableitungsregeln

- **Summen- und Faktorregel:** $(c \cdot u + v)' = c \cdot u' + v'$
- **Produktregel:** $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
- **Kettenregel:** $\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ – „äußere Ableitung mal innere Ableitung“
- **Häufiger Sonderfall:** $\left(e^{ax+b}\right)' = a \cdot e^{ax+b}$ und $\left(e^{g(x)}\right)' = g'(x) \cdot e^{g(x)}$

Auftrag 1:

Jeder schreibt drei Funktionsterme auf. Der Partner sagt nur, welche Regel man braucht (Summe, Produkt, Kette oder eine Kombination) und woran er das erkennt – noch **nicht** ableiten. Dann wechseln.

★ *Pflicht · ca. 3 Min.*

Stufe 1 · Verstehen ■□□□

Starten Sie mit der Sprungaufgabe A. Fehlerfrei gelöst? Dann weiter mit Stufe 2 – sonst führen Sie die Beispiele zum Ziel.

Sprungaufgabe A:

Leiten Sie ab.

a) $f(x) = 3x^4 - \frac{2}{x}$ b) $g(x) = x^2 \cdot e^x$ c) $h(x) = \sqrt{4x+1}$ d) $k(x) = \ln(x^2+1)$

Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 2

Beispiel 1 (vollständig):

Leiten Sie $f(x) = (2x-1) \cdot e^x$ ab.

Struktur: Produkt mit $u = 2x-1,\ u' = 2$ und $v = e^x,\ v' = e^x$

Produktregel: $f'(x) = 2 \cdot e^x + (2x-1) \cdot e^x$

e^x ausklammern: $f'(x) = (2+2x-1) \cdot e^x$

Ergebnis: $f'(x) = (2x+1) \cdot e^x$

Aufgabe 1 ★:

Leiten Sie wie in Beispiel 1 ab und vereinfachen Sie.

a) $f(x)=(3x+2)\cdot e^{x}$ b) $g(x)=x\cdot \ln x$

★ *Pflicht · ca. 4 Min.*

Beispiel 2 (mit Lücken):

Leiten Sie $f(x)=(x^2+3)^4$ ab.

äußere Funktion: u^4, Ableitung: ____

innere Funktion: x^2+3, Ableitung: ____

$f'(x) = 4\cdot(x^2+3)^3\cdot$ ____ $=$ ____

Aufgabe 2 ★:

Leiten Sie mit der Kettenregel ab.

a) $f(x)=(3x-1)^5$ b) $g(x)=e^{-x^2}$ c) $h(x)=\sin(2x)$

★ *Pflicht · ca. 4 Min.*

Aufgabe 3 ★ – Fehler-Detektiv:

Finden Sie in jeder Zeile den Fehler, erklären Sie ihn und verbessern Sie. Vergleichen Sie danach mit Ihrem Partner.

a) $(x\cdot e^{x})'=1\cdot e^{x}$ b) $(e^{3x})'=e^{3x}$ c) $\left(\frac{1}{x}\right)'=\ln x$ d) $\left((2x+1)^2\right)'=2(2x+1)$

★ *Pflicht · ca. 6 Min.*

Stufe 2 · Anwenden ■■□□

Standardaufgaben ohne vorgegebene Schritte. Sprungaufgabe B fehlerfrei gelöst? Dann weiter mit Stufe 3.

Sprungaufgabe B:

Leiten Sie ab und vereinfachen Sie.

a) $f(x)=x^2\cdot e^{-2x}$ b) $g(x)=\ln(3x)$ c) $h(x)=\frac{4}{(x-1)^2}$

Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 3

Aufgabe 4 ★:

Leiten Sie ab.

a) $f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\sqrt{x}$ b) $f(x)=5e^{2x-1}$ c) $f(x)=\frac{3}{x^3}$

d) $f(x)=\ln(5-x)$ e) $f(x)=x\cdot\sqrt{x}$ f) $f(x)=\cos(\pi x)$

★ *Pflicht · ca. 8 Min.*

Aufgabe 5 ★:

Leiten Sie ab und schreiben Sie das Ergebnis so weit wie möglich faktorisiert.

a) $f(x)=x\cdot e^{-x^2}$ b) $f(x)=(x+1)^2\cdot e^{x}$ c) $f(x)=x^2\cdot\ln x$

★ *Pflicht · ca. 8 Min.*

Stufe 3 · Vernetzen ■■■□

Sachzusammenhänge, Begründungen und Verbindungen zu anderen Themen. Sprungaufgabe C fehlerfrei? Dann weiter mit Stufe 4.

Sprungaufgabe C:

Zeigen Sie: Für $f(x)=e^{kx}$ gilt $f''(x)=k^2\cdot f(x)$.

Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 4

Aufgabe 6 ★:

Gegeben ist $f(x)=(x-2)\cdot e^x$.

a) Zeigen Sie: $f'(x)=(x-1)\cdot e^x$ und $f''(x)=x\cdot e^x$.

b) Stellen Sie eine Vermutung für die n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$ auf.

c) Ihr Partner prüft Ihre Vermutung, indem er $f'''(x)$ berechnet. Erklären Sie ihm, warum bei jedem Ableiten genau 1 dazukommt.

★ *Pflicht · ca. 8 Min.*

Aufgabe 7 ★:

Die Konzentration eines Wirkstoffs im Blut wird beschrieben durch $c(t)=10t\cdot e^{-0{,}5t}$ (t in h, c in mg/l).

a) Bestimmen Sie $c'(t)$.

b) Berechnen Sie $c'(0)$ und deuten Sie den Wert im Sachzusammenhang.

c) Zu welchem Zeitpunkt ist die momentane Änderungsrate null?

★ *Pflicht · ca. 7 Min.*

Stufe 4 · Meistern ■■■■

Abiturniveau, Teil A (ohne Hilfsmittel) – zur Differenzierung oder als Hausaufgabe.

Aufgabe 8:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\ln(x^2+1)$, $x\in R$.

a) Zeigen Sie, dass $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ gilt. (2 BE)

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(1\,|\,f(1))$. (3 BE)

c) Begründen Sie, dass der Graph von f im Ursprung einen Tiefpunkt hat. (3 BE)

Differenzierung · ca. 15 Min. · Teil A, 8 BE

Zum Weiterdenken:

Leiten Sie $f(x)=x^x$ für $x>0$ ab. Tipp: $x^x=e^{x\cdot\ln x}$.