

AB 5 · Lösungen

Datum:

Abi

Lösungsleiter: Vergleichen Sie zuerst nur Ihr **Endergebnis** (Tabelle). Stimmt es nicht, lesen Sie den Lösungsweg Schritt für Schritt, bis Sie die erste Abweichung finden. Fehler anstreichen, nicht löschen – mit **grün** verbessern und die Ursache notieren.

Endergebnisse

Aufgabe	Endergebnis
Sprungaufgabe A	a) $\ln 7$ b) $\frac{1}{2}$ c) e^2 d) 3
Aufgabe 1 ★	a) $\frac{1}{3}\ln 5$ b) $-\ln 5$
Beispiel 2 (Lücken)	$5;\ 3;\ \ln 2$
Aufgabe 2 ★	a) $0\,;\ln 3$ b) 0
Aufgabe 3 ★	a) keine Regel für Summen b) e^{2x} c) keine Lösung d) e^{2x}
Sprungaufgabe B	a) 5 b) $\ln 4$ c) $x=3$
Aufgabe 4 ★	a) $4\ln 2$ b) ± 2 c) $\frac{1}{2}$ d) 0 e) 3 f) $\ln 3$
Aufgabe 5 ★	a) $\frac{1}{2}$ b) -2 c) 9 d) $\ln x$
Sprungaufgabe C	$t=5\ln 2\approx 3{,}5$ h
Aufgabe 6 ★	a) 90 °C b) 20 °C c) nach ca. 6,9 min
Aufgabe 7 ★	a) $k=\frac{\ln 2}{4}$ b) nach 12 h
Aufgabe 8	a) $x=\ln 2$ b) 0 bzw. $+\infty$ c) $x=0,\ f(0)=-1$ d) $y\geq -1$

Lösungswege

Sprungaufgabe A:

a) logarithmieren: $x=\ln 7$

b) $2x-1=\ln 1=0$, also $x=\frac{1}{2}$

c) $x=e^2$

d) $e^x(x-3)=0,\ e^x\neq 0$, also $x=3$

Aufgabe 1:

a) $e^{3x}=5,\ 3x=\ln 5$

b) $e^{-x}=5,\ -x=\ln 5$

Beispiel 2: Lücken

$e^{2x}=(e^x)^2=z^2$, also $z^2-5z+6=0$ mit $z=2$ und $z=3$; zurück: $x=\ln 2$ und $x=\ln 3$

Aufgabe 2:

a) $z^2-4z+3=0$: $z=1$, $z=3$, also $x=0$, $x=\ln 3$

b) $z^2+z-2=0$: $z=1$ oder $z=-2$; $e^x=-2$ unmöglich, also nur $x=0$

Aufgabe 3:

a) Die Regel gilt nur für Produkte: $\ln(a\cdot b)=\ln a+\ln b$.

b) Exponenten addieren: $e^{x+x}=e^{2x}$.

c) $e^x>0$; ln von negativen Zahlen ist nicht definiert – keine Lösung.

d) Exponenten subtrahieren: $e^{3x-x}=e^{2x}$.

Sprungaufgabe B:

a) $3+2=5$

b) $\ln\frac{8}{2}=\ln 4=2\ln 2$

c) $x+1=3x-5$, also $x=3$; Probe: $\ln 4=\ln 4$ ✓

Aufgabe 4:

a) $-0{,}5x=\ln\frac{1}{4}=-\ln 4$,
$x=2\ln 4=4\ln 2$

b) $e^{-x}\neq 0$, also $x^2=4$

c) $2x=1$

d) $e^{2x}=1$, $2x=0$

e) $\ln(x^2)=\ln 9$, $x>0$: $x=3$

f) durch $e^x\neq 0$ teilen erlaubt: $e^x=3$

Aufgabe 5:

a) $\ln e^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

b) $\ln e^{-2}=-2$

c) $e^{\ln 9}=9$

d) $\ln\frac{x^2}{x}=\ln x$

Sprungaufgabe C:

$500\,e^{0{,}2t}=1000$, also $e^{0{,}2t}=2$, $t=\frac{\ln 2}{0{,}2}=5\ln 2\approx 3{,}45$ h

Aufgabe 6:

a) $T(0)=20+70=90$

b) $e^{-0{,}1t}\to 0$, also $T\to 20$ (Raumtemperatur)

c) $70\,e^{-0{,}1t}=35$, $e^{-0{,}1t}=\frac{1}{2}$, $t=10\ln 2\approx 6{,}9$

d) 20 °C: Raumtemperatur; 70 °C: anfänglicher Temperaturunterschied; 0,1: Abkühlkonstante. 55 °C liegt genau in der Mitte zwischen 90 °C und 20 °C.

Aufgabe 7:

a) $e^{-4k}=\frac{1}{2}$, $-4k=-\ln 2$

b) $\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$: drei Halbwertszeiten, also 3 · 4 h = 12 h

Aufgabe 8:

a) $e^x(e^x-2)=0$, $e^x\neq 0$, also $e^x=2$ und $x=\ln 2$ (2 BE)

b) $x\to-\infty$: beide Terme gegen 0, also $f(x)\to 0$; $x\to+\infty$: $e^x(e^x-2)\to+\infty$ (2 BE)

c) $f'(x)=2e^{2x}-2e^x=2e^x(e^x-1)$; $f'(x)=0$ für $e^x=1$, also $x=0$; Vorzeichenwechsel von – nach +: Tiefpunkt $(0\,|\,-1)$ (3 BE)

d) Tiefpunkt ist globales Minimum: W_f = [−1; ∞[(1 BE)

Zum Weiterdenken:

$y = 1 + x$ ist die Tangente an den Graphen von e^x im Punkt $(0 \mid 1)$. Der Graph von e^x ist überall linksgekrümmt und liegt daher immer oberhalb dieser Tangente.