

AB 5 · e-Funktion und Logarithmus

Datum:

Abi

Kurz erklärt

Die natürliche Exponentialfunktion e^x steckt in fast jeder Analysis-Aufgabe des Abiturs. Der natürliche Logarithmus $\ln$ macht sie rückgängig: $\ln x$ ist die Hochzahl, mit der man e potenzieren muss, um x zu erhalten.

Rechenregeln

$e^{\ln a}=a$ (für $a>0$) $\quad \ln\left(e^x\right)=x \quad e^0=1 \quad \ln 1=0 \quad \ln e=1$

$\ln(a\cdot b)=\ln a+\ln b \quad \ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b \quad \ln\left(a^r\right)=r\cdot\ln a$

Wichtig: $e^x>0$ für alle x – also ist e^x **nie** null.

Exponentialgleichungen

- **Isolieren und logarithmieren:** $e^{2x}=5\Rightarrow 2x=\ln 5\Rightarrow x=\frac{1}{2}\ln 5$
- **Produkt:** $(x-2)\cdot e^x=0\Rightarrow x=2$, denn $e^x\neq 0$
- **Substitution:** $e^{2x}-3e^x+2=0$ mit $z=e^x$: $z^2-3z+2=0$; nur $z>0$ führt zu einer Lösung.
- **Wachstum:** $N(t)=N_0\cdot e^{kt}$; Verdopplungszeit $T_2=\frac{\ln 2}{k}$, Halbwertszeit $T_{1/2}=\frac{\ln 2}{k}$ bei $N_0\cdot e^{-kt}$.

Auftrag 1:

Erklären Sie sich gegenseitig in je einer Minute, warum $(x^2-1)\cdot e^x=0$ genau die Lösungen $x=\pm 1$ hat und warum $e^x=-2$ keine Lösung besitzt. Wer zuhört, achtet auf die Schlüsselwörter **nie null**, **Nullprodukt** und **positiv**.

★ *Pflicht · ca. 3 Min.*

Stufe 1 · Verstehen ■□□□

Starten Sie mit der Sprungaufgabe A. Fehlerfrei gelöst? Dann weiter mit Stufe 2 – sonst führen Sie die Beispiele zum Ziel.

Sprungaufgabe A:

Lösen Sie die Gleichungen.

a) $e^x=7$ b) $e^{2x-1}=1$ c) $\ln x=2$ d) $x\cdot e^x-3e^x=0$

Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 2

Beispiel 1 (vollständig):

Lösen Sie $3e^{2x}-12=0$.

e-Term isolieren: $3e^{2x}=12$, also $e^{2x}=4$

Logarithmieren: $2x=\ln 4$

Nach x auflösen: $x=\frac{1}{2}\ln 4=\ln\left(4^{\frac{1}{2}}\right)=\ln 2$

Ergebnis: $x=\ln 2\approx 0{,}69$

Aufgabe 1 ★:

Lösen Sie wie in Beispiel 1.

a) $2e^{3x}-10=0$ b) $5-e^{-x}=0$

★ *Pflicht · ca. 4 Min.*

Beispiel 2 (mit Lücken):

Lösen Sie $e^{2x}-5e^{x}+6=0$.

Substitution $z=e^x$: $z^2-\square z+6=0$

Lösungen: $z_1=2$; $z_2=\square$

Rücksubstitution: $e^x=2 \Rightarrow x_1=\square$; $e^x=3 \Rightarrow x_2=\ln 3$

Aufgabe 2 ★:

Lösen Sie wie in Beispiel 2.

a) $e^{2x}-4e^{x}+3=0$ b) $e^{2x}+e^{x}-2=0$

★ *Pflicht · ca. 5 Min.*

Aufgabe 3 ★ – Fehler-Detektiv:

Finden Sie in jeder Zeile den Fehler, erklären Sie ihn und verbessern Sie. Vergleichen Sie danach mit Ihrem Partner.

a) $\ln(a+b)=\ln a+\ln b$ b) $e^x\cdot e^x=e^{x^2}$ c) $e^x=-2$, also $x=\ln(-2)$ d) $\frac{e^{3x}}{e^x}=e^3$

★ *Pflicht · ca. 6 Min.*

Stufe 2 · Anwenden ■■□□

Standardaufgaben ohne vorgegebene Schritte. Sprungaufgabe B fehlerfrei gelöst? Dann weiter mit Stufe 3.

Sprungaufgabe B:

a) Vereinfachen Sie $\ln(e^3)+e^{\ln 2}$. b) Vereinfachen Sie $\ln 8-\ln 2$. c) Lösen Sie $\ln(x+1)=\ln(3x-5)$.

Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 3

Aufgabe 4 ★:

Lösen Sie die Gleichungen.

a) $e^{-0{,}5x}=\frac{1}{4}$ b) $(x^2-4)\cdot e^{-x}=0$ c) $\ln(2x)=0$

d) $e^x=e^{-x}$ e) $2\ln x=\ln 9$ f) $e^{2x}=3e^x$

★ *Pflicht · ca. 8 Min.*

Aufgabe 5 ★:

Vereinfachen Sie ohne Taschenrechner.

a) $\ln\sqrt{e}$ b) $\ln\frac{1}{e^2}$ c) $e^{2\ln 3}$ d) $\ln(x^2)-\ln x$ für $x>0$

★ *Pflicht · ca. 5 Min.*

Stufe 3 · Vernetzen ■■■□

Sachzusammenhänge, Begründungen und Verbindungen zu anderen Themen. Sprungaufgabe C fehlerfrei? Dann weiter mit Stufe 4.

Sprungaufgabe C:

Eine Bakterienkultur wächst nach $N(t)=500\cdot e^{0,2t}$ (t in Stunden). Nach welcher Zeit hat sie sich verdoppelt? Verwenden Sie $\ln 2\approx 0,69$.

Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 4

Aufgabe 6 ★:

Eine Tasse Tee kühlt ab. Ihre Temperatur ist $T(t)=20+70\cdot e^{-0,1t}$ (t in min, T in °C). Verwenden Sie $\ln 2\approx 0,69$.

a) Bestimmen Sie die Anfangstemperatur.

b) Welche Temperatur hat der Tee nach sehr langer Zeit?

c) Wann ist der Tee auf 55 °C abgekühlt?

d) Erklären Sie Ihrem Partner, was die Zahlen 20, 70 und 0,1 im Sachzusammenhang bedeuten. Tauschen Sie dann die Rollen für die Zahl 55 aus Teil c).

★ *Pflicht · ca. 10 Min.*

Aufgabe 7 ★:

Ein Medikament wird im Körper abgebaut: $m(t)=m_0\cdot e^{-kt}$ (t in h). Nach 4 Stunden ist noch die Hälfte vorhanden.

a) Bestimmen Sie k exakt.

b) Nach wie vielen Stunden ist nur noch ein Achtel vorhanden? Begründen Sie ohne Taschenrechner.

★ *Pflicht · ca. 5 Min.*

Stufe 4 · Meistern ■■■■

Abiturniveau, Teil A (ohne Hilfsmittel) – zur Differenzierung oder als Hausaufgabe.

Aufgabe 8:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=e^{2x}-2e^{x}$, $x\in R$.

a) Bestimmen Sie die Nullstelle von f. (2 BE)

b) Beschreiben Sie das Verhalten von f für $x\to -\infty$ und $x\to +\infty$. (2 BE)

c) Zeigen Sie, dass $f'(x)=2e^{x}(e^{x}-1)$ gilt, und bestimmen Sie die Extremstelle von f sowie den zugehörigen Funktionswert. (3 BE)

d) Geben Sie die Wertemenge von f an. (1 BE)

Differenzierung · ca. 15 Min. · Teil A, 8 BE

Zum Weiterdenken:

Begründen Sie anschaulich, dass $e^{x}\geq 1+x$ für alle x gilt. Tipp: Welche Gerade ist $y=1+x$ für den Graphen von e^{x}?