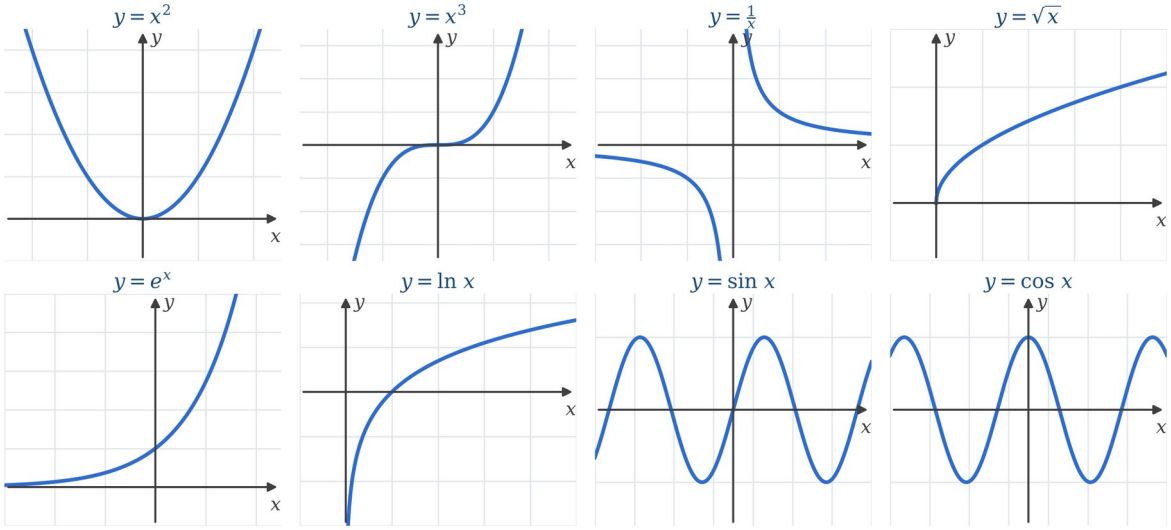
AB 4 · Funktionen und Graphen

Datum:

Abi

Kurz erklärt

Im Teil A sollen Sie Graphen erkennen, skizzieren und Terme zuordnen – ohne Taschenrechner. Dafür reichen acht Grundfunktionen und vier Veränderungen. Prägen Sie sich die Grundgraphen ein:



Veränderungen des Graphen von y = f(x)

Term	Wirkung auf den Graphen
$f(x)+d$	um d nach oben verschieben ($d<0$: nach unten)
$f(x-c)$	um c nach **rechts** verschieben ($f(x+2)$: 2 nach links)
$a \cdot f(x)$	in y-Richtung mit Faktor a strecken; $a<0$: zusätzlich an der x-Achse spiegeln
$f(-x)$	an der y-Achse spiegeln

Symmetrie und Definitionsmenge

- $f(-x)=f(x)$ → achsensymmetrisch zur y-Achse; $f(-x)=-f(x)$ → punktsymmetrisch zum Ursprung. Bei ganzrationalen Funktionen: nur gerade bzw. nur ungerade Exponenten.
- Ausschließen: Nennernullstellen; unter der Wurzel negativ; $\ln$ von Zahlen ≤ 0.
- Waagrechte Asymptote: Grenzwert für $x \to \pm\infty$; senkrechte Asymptote: Nennernullstelle, die nicht wegkürzbar ist.

Auftrag 1:

Einer nennt eine Veränderung der Normalparabel (z. B. „2 nach links, dann an der x-Achse spiegeln“), der andere schreibt den Term auf und skizziert. Dann wechseln – je zwei Runden. Wer zuhört, achtet auf **Vorzeichen** und **Reihenfolge**.

★ *Pflicht · ca. 4 Min.*

Stufe 1 · Verstehen ■□□□

Starten Sie mit der Sprungaufgabe A. Fehlerfrei gelöst? Dann weiter mit Stufe 2 – sonst führen Sie die Beispiele zum Ziel.

Sprungaufgabe A:

a) Der Graph von g entsteht aus $y=x^2$ durch Verschieben um 3 nach rechts und 1 nach unten. Geben Sie $g(x)$ an.

b) Untersuchen Sie $f(x)=x^4-2x^2$ und $h(x)=x^3+x$ auf Symmetrie.

c) Geben Sie die maximale Definitionsmenge von $k(x)=\frac{1}{x-2}+\sqrt{x}$ an.

Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 2

Beispiel 1 (vollständig):

Beschreiben Sie, wie der Graph von $f(x)=-2(x+1)^2+3$ aus der Normalparabel entsteht.

$(x+1)^2$: Verschiebung um **1 nach links**

$-2\cdot(\ldots)$: Streckung mit Faktor 2 in y-Richtung und **Spiegelung an der x-Achse**

$+3$: Verschiebung um **3 nach oben**

Ergebnis: nach unten geöffnete, schmalere Parabel mit Scheitel $S(-1\,|\,3)$.

Aufgabe 1 ★:

Beschreiben Sie wie in Beispiel 1, wie der Graph entsteht, und geben Sie einen markanten Punkt an.

a) $g(x)=\frac{1}{2}(x-2)^3+1$

b) $h(x)=e^{x+1}-2$

★ *Pflicht · ca. 4 Min.*

Beispiel 2 (mit Lücken):

Untersuchen Sie $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ auf Symmetrie.

$f(-x) = (-x) : ((-x)^2 + 1) = -x : (\quad + 1)$

$= -\,(\,x : (x^2 + 1)\,) =$

Also ist der Graph von f zum Ursprung.

Aufgabe 2 ★:

Untersuchen Sie auf Symmetrie zur y-Achse oder zum Ursprung.

a) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$

b) $g(x)=x\cdot e^{x^2}$

c) $h(x)=x^3-x^2$

★ *Pflicht · ca. 5 Min.*

Aufgabe 3 ★ – Fehler-Detektiv:

Mia hat folgende Aussagen notiert. Finden Sie jeweils den Fehler, erklären Sie ihn und verbessern Sie. Vergleichen Sie danach mit Ihrem Partner.

a) „Der Graph von $f(x)=(x+2)^2$ ist die um 2 nach rechts verschobene Normalparabel."

b) „$f(x)=x^3+1$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung, weil nur ungerade Exponenten vorkommen."

c) „Die Definitionsmenge von $\ln(x-3)$ ist $x\geq 3$."

d) „$y=-x^2$ ist die an der y-Achse gespiegelte Normalparabel."

★ *Pflicht · ca. 6 Min.*

Stufe 2 · Anwenden ■■□□

Standardaufgaben ohne vorgegebene Schritte. Sprungaufgabe B fehlerfrei gelöst? Dann weiter mit Stufe 3.

Sprungaufgabe B:

Geben Sie das Verhalten für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ an.

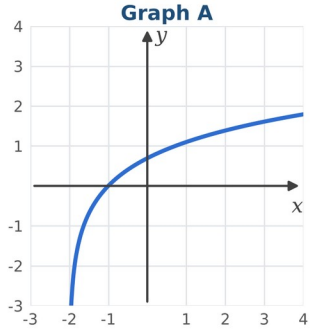
a) $f(x) = -2x^3 + x$ b) $g(x) = \frac{3x}{x+1}$ c) $h(x) = x \cdot e^{-x}$

Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 3

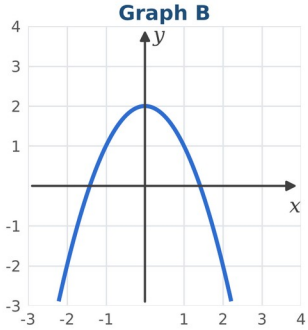
Aufgabe 4 ★:

Ordnen Sie jedem Graphen den passenden Term zu. Ein Term bleibt übrig. Begründen Sie jeweils mit einem Merkmal.

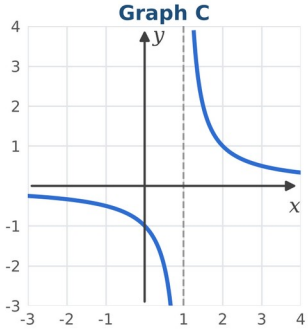
Graph A



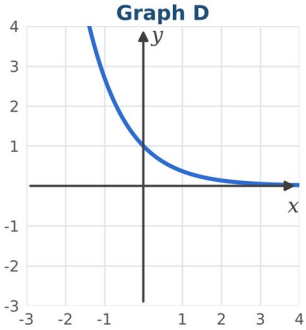
Graph B



Graph C



Graph D



1) $f_1(x) = \frac{1}{x-1}$ 2) $f_2(x) = -x^2 + 2$ 3) $f_3(x) = e^{-x}$ 4) $f_4(x) = \ln(x+2)$ 5) $f_5(x) = (x-1)^3$

★ *Pflicht · ca. 8 Min.*

Aufgabe 5 ★:

Geben Sie die maximale Definitionsmenge und die Gleichungen aller Asymptoten an.

a) $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ b) $g(x) = \frac{4}{x^2+1}$ c) $h(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

★ *Pflicht · ca. 7 Min.*

Stufe 3 · Vernetzen ■■■□

Sachzusammenhänge, Begründungen und Verbindungen zu anderen Themen. Sprungaufgabe C fehlerfrei? Dann weiter mit Stufe 4.

Sprungaufgabe C:

Die Normalparabel wird zuerst an der x-Achse gespiegelt und dann um 4 nach oben verschoben. Zeigen Sie, dass man dasselbe erhält, wenn man zuerst um 4 nach unten verschiebt und dann spiegelt.

Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 4

Aufgabe 6 ★:

Ein Brückenbogen hat die Form einer nach unten geöffneten Parabel. Er ist 40 m breit und in der Mitte 10 m hoch. Der Ursprung liegt in der Mitte unter dem Scheitel.

a) Bestimmen Sie einen Funktionsterm $f(x)$ für den Bogen.

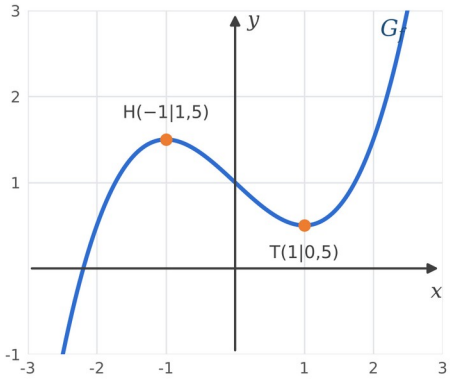
b) Wie hoch ist der Bogen 10 m vom Rand entfernt?

c) Ihr Partner legt den Ursprung an den linken Fußpunkt. Bestimmen Sie beide den neuen Term und erklären Sie sich gegenseitig, welche Veränderung des Graphen dahintersteckt.

★ *Pflicht · ca. 9 Min.*

Aufgabe 7 ★:

Die Abbildung zeigt den Graphen von f mit Hochpunkt H und Tiefpunkt T.



a) Geben Sie die Hoch- und Tiefpunkte von $g(x)=f(x)-2$ und $h(x)=f(-x)$ an.

b) Skizzieren Sie die Graphen von g und h in ein Koordinatensystem.

★ Pflicht · ca. 6 Min.

Stufe 4 · Meistern

Abiturniveau, Teil A (ohne Hilfsmittel) – zur Differenzierung oder als Hausaufgabe.

Aufgabe 8:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=2-\frac{4}{x+1}$ und maximaler Definitionsmenge D_f.

a) Geben Sie D_f und die Gleichungen der Asymptoten des Graphen von f an. (2 BE)

b) Beschreiben Sie, wie der Graph von f aus dem Graphen von $y=\frac{1}{x}$ hervorgeht. (3 BE)

c) Berechnen Sie die Nullstelle von f. (2 BE)

d) Geben Sie die Wertemenge von f an. (1 BE)

Differenzierung · ca. 15 Min. · Teil A, 8 BE

Zum Weiterdenken:

Kann ein Graph gleichzeitig achsensymmetrisch zur y-Achse und punktsymmetrisch zum Ursprung sein?