

AB 3 · Lineare Gleichungssysteme

Datum:

Abi

Kurz erklärt

Lineare Gleichungssysteme (LGS) brauchen Sie im Abitur bei **Steckbriefaufgaben** (Funktionsterm aus Bedingungen bestimmen) und in der **Geometrie** (Punktprobe, Schnitt von Geraden und Ebenen). Die Idee ist immer gleich: Unbekannte nacheinander eliminieren.

Verfahren

- **Additionsverfahren:** Gleichungen so mit Zahlen multiplizieren, dass beim Addieren eine Variable wegfällt.
- **Einsetzungsverfahren:** eine Gleichung nach einer Variablen auflösen und in die anderen einsetzen.
- **Drei Unbekannte:** aus zwei Gleichungspaaren **dieselbe** Variable eliminieren → LGS mit zwei Unbekannten → lösen → rückwärts einsetzen.
- **Probe:** Lösung in **alle** Ausgangsgleichungen einsetzen.

Anzahl der Lösungen

- **Genau eine Lösung:** Am Ende steht z. B. $x=2$.
- **Keine Lösung:** Es entsteht ein Widerspruch wie $0=5$.
- **Unendlich viele Lösungen:** Es entsteht eine wahre Aussage wie $0=0$ – eine Variable bleibt frei wählbar.

Auftrag 1:

Erklären Sie sich gegenseitig in je einer Minute, woran man am Ende der Rechnung erkennt, ob ein LGS keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen hat. Wer zuhört, achtet auf die Schlüsselwörter **Widerspruch**, **wahre Aussage** und **frei wählbar**.

★ *Pflicht · ca. 3 Min.*

Stufe 1 · Verstehen ■□□□

Starten Sie mit der Sprungaufgabe A. Fehlerfrei gelöst? Dann weiter mit Stufe 2 – sonst führen Sie die Beispiele zum Ziel.

Sprungaufgabe A:

Lösen Sie die LGS.

a) I: $2x+3y=12$, II: $x-y=1$

b) I: $x+y+z=6$, II: $2x-y+z=3$, III: $x+2y-z=2$

Sprungtest · ca. 5 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 2

Beispiel 1 (vollständig):

Lösen Sie das LGS I: $x+y+z=2$, II: $2x-y+z=2$, III: $x+2y-z=5$.

z eliminieren: I + III: $2x+3y=7$ (IV) II + III: $3x+y=7$ (V)

y eliminieren: $3\cdot$V − IV: $9x+3y-2x-3y=21-7$, also $7x=14$ und $x=2$

Rückwärts einsetzen: in V: $6+y=7$, also $y=1$; in I: $2+1+z=2$, also $z=-1$

Ergebnis: $x=2$, $y=1$, $z=-1$. Probe in II: $4-1-1=2$ ✓

Aufgabe 1 ★:

Lösen Sie wie in Beispiel 1: I: $x+y+z=6$, II: $x-y+2z=5$, III: $2x+y-z=1$.

★ *Pflicht · ca. 5 Min.*

Beispiel 2 (mit Lücken):

Eine Parabel $f(x)=ax^2+bx+c$ verläuft durch $A(0|1)$, $B(1|2)$ und $C(2|7)$. Bestimmen Sie $f(x)$.

$f(0)=1$: $c=$ ____

$f(1)=2$: $a+b+c=2 \Rightarrow a+b=$ ____

$f(2)=7$: ____ $a+2b+c=7 \Rightarrow 2a+b=3$

Subtrahieren: $a=$ ____, $b=$ ____

Ergebnis: $f(x)=$ ____

Aufgabe 2 ★:

Bestimmen Sie die Parabel $f(x)=ax^2+bx+c$ durch $P(0|3)$, $Q(1|0)$ und $R(-1|8)$.

★ *Pflicht · ca. 4 Min.*

Aufgabe 3 ★ – Fehler-Detektiv:

Tom hat LGS gelöst. Finden Sie jeweils den Fehler, erklären Sie ihn und verbessern Sie. Vergleichen Sie danach mit Ihrem Partner.

a) I: $x+2y=5$, II: $2x+4y=10$. Tom: „II − 2·I ergibt $0=0$, also gibt es keine Lösung."

b) I: $x+y=3$, II: $x-y=1$. Tom: „I − II ergibt $0=2$, also keine Lösung."

c) I: $2x+y=4$, II: $x+y=3$. Tom: „Aus I folgt $y=4+2x$; eingesetzt in II: $3x=-1$."

★ *Pflicht · ca. 6 Min.*

Stufe 2 · Anwenden ■■□□

Standardaufgaben ohne vorgegebene Schritte. Sprungaufgabe B fehlerfrei gelöst? Dann weiter mit Stufe 3.

Sprungaufgabe B:

Geben Sie an, ob das LGS keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen hat, und lösen Sie gegebenenfalls.

a) I: $2x-y=3$, II: $-4x+2y=-6$

b) I: $x+y=2$, II: $2x+2y=5$

c) I: $x-y=1$, II: $y-z=1$, III: $x+z=5$

Sprungtest · ca. 5 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 3

Aufgabe 4 ★:

Lösen Sie die LGS.

a) I: $3x+2y=7$, II: $5x-3y=-1$

b) I: $x+y-z=0$, II: $2x-y+z=3$, III: $x+3y+2z=13$

c) I: $x+y+z=1$, II: $2x+2y+2z=3$, III: $x-y=0$

★ *Pflicht · ca. 10 Min.*

Aufgabe 5 ★:

Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades ist punktsymmetrisch zum Ursprung und verläuft durch $P(1|2)$ und $Q(2|10)$.

a) Begründen Sie, dass der Ansatz $f(x)=ax^3+bx$ genügt.

b) Bestimmen Sie $f(x)$.

★ *Pflicht · ca. 6 Min.*

Stufe 3 · Vernetzen ■■■□

Sachzusammenhänge, Begründungen und Verbindungen zu anderen Themen. Sprungaufgabe C fehlerfrei? Dann weiter mit Stufe 4.

Sprungaufgabe C:

Für welchen Wert von a hat das LGS I: $x+2y=3$, II: $2x+ay=6$ unendlich viele Lösungen? Wie viele Lösungen gibt es sonst?

Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 4

Aufgabe 6 ★:

Ein Café verkauft Espresso (2 €), Cappuccino (3 €) und Latte macchiato (4 €). An einem Vormittag waren es 60 Getränke für insgesamt 180 €, dabei doppelt so viele Cappuccino wie Espresso.

a) Stellen Sie ein LGS auf.

b) Lösen Sie das LGS.

c) Ihr Partner lässt die Angabe „doppelt so viele Cappuccino“ weg. Erklären Sie ihm, warum es dann viele Lösungen gibt, und nennen Sie zwei.

★ *Pflicht · ca. 10 Min.*

Aufgabe 7 ★:

Prüfen Sie, ob der Punkt $P(3\,|\,5\,|\,1)$ in der Ebene $E: \vec{X}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ liegt.

★ *Pflicht · ca. 5 Min.*

Stufe 4 · Meistern ■■■■

Abiturniveau, Teil A (ohne Hilfsmittel) – zur Differenzierung oder als Hausaufgabe.

Aufgabe 8:

Der Graph einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades schneidet die y-Achse bei $y=2$, hat im Punkt $T(1\,|\,0)$ einen Tiefpunkt und verläuft durch $P(-1\,|\,4)$.

a) Stellen Sie mit dem Ansatz $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ein passendes LGS auf. (3 BE)

b) Bestimmen Sie $f(x)$. (3 BE)

c) Zeigen Sie, dass $x=-2$ eine weitere Nullstelle von f ist, und geben Sie $f(x)$ in Linearfaktoren an. (2 BE)

Differenzierung · ca. 15 Min. · Teil A, 8 BE

Zum Weiterdenken:

Drei Ebenen im Raum entsprechen einem LGS mit drei Gleichungen und drei Unbekannten. Skizzieren Sie Lagen der drei Ebenen, bei denen das LGS keine, genau eine bzw. unendlich viele Lösungen hat.