

AB 2 · Gleichungen lösen

Abi

Datum:

Kurz erklärt

Nullstellen, Extremstellen, Schnittpunkte – im Abitur endet fast jede Analysis-Aufgabe in einer Gleichung $f(x)=0$. Der wichtigste Schritt ist, **zuerst den Typ zu erkennen**. Dann ist das Verfahren klar:

Welcher Typ – welches Verfahren?

- **Produkt gleich null** → Satz vom Nullprodukt: $a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0$ oder $b=0$, z. B. $x^2(x-3)=0$.
- **Kein absolutes Glied** → x ausklammern: $x^3-4x=x(x^2-4)$. **Nie durch x teilen** – dabei geht $x=0$ verloren!
- **Quadratisch** $ax^2+bx+c=0$ → Mitternachtsformel $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; ist $b^2-4ac<0$, gibt es keine Lösung.
- **Nur x^4 und x^2** → Substitution $z=x^2$, lösen, zurück: $x^2=z$ (nur für $z\geq 0$).
- **Bruchgleichung** → Definitionsmenge notieren, mit dem Hauptnenner multiplizieren, Lösungen prüfen.
- **Wurzelgleichung** → Wurzel isolieren, quadrieren, **Probe** machen (Quadrieren erzeugt Scheinlösungen).

Auftrag 1:

Erklären Sie sich gegenseitig in je einer Minute, warum man bei $x^3=4x$ nicht durch x teilen darf und wie man es richtig macht. Wer zuhört, achtet auf die Schlüsselwörter **ausklammern**, **Nullprodukt** und **Lösung verloren**.

★ *Pflicht · ca. 3 Min.*

Stufe 1 · Verstehen ■□□□

Starten Sie mit der Sprungaufgabe A. Fehlerfrei gelöst? Dann weiter mit Stufe 2 – sonst führen Sie die Beispiele zum Ziel.

Sprungaufgabe A:

Lösen Sie die Gleichungen.

a) $x^2-5x+6=0$ b) $(x+1)(2x-6)=0$ c) $x^3=9x$ d) $x^4-5x^2+4=0$

Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 2

Beispiel 1 (vollständig):

Lösen Sie $x^4-3x^2-4=0$.

Substitution $z=x^2$: $z^2-3z-4=0$

Mitternachtsformel: $z_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\dfrac{3\pm 5}{2}$, also $z_1=4$ und $z_2=-1$

Rücksubstitution: $x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$; $x^2=-1$ hat keine Lösung.

Ergebnis: L = {−2; 2}

Aufgabe 1 ★:

Lösen Sie wie in Beispiel 1.

a) $x^4-10x^2+9=0$ b) $x^4+x^2-12=0$

★ *Pflicht · ca. 5 Min.*

Beispiel 2 (mit Lücken):

Lösen Sie $2x^3-2x^2-12x=0$.

Ausklammern: $2x^3 - 2x^2 - 12x = \square \cdot (x^2 - x - 6) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $x_1 = \square$ oder $x^2 - x - 6 = 0$

Mitternachtsformel: $x_{2,3} = (1 \pm \sqrt{(\square + 24)}) : 2 = (1 \pm \square) : 2$

Lösungen: $x_1 = 0$; $x_2 = \square$; $x_3 = -2$

Aufgabe 2 ★:

Lösen Sie die Gleichungen.

a) $x^3+x^2-6x=0$

b) $3x^3=12x^2$

★ *Pflicht · ca. 4 Min.*

Aufgabe 3 ★ – Fehler-Detektiv:

Ben hat Gleichungen gelöst. Finden Sie jeweils den Fehler, erklären Sie ihn und verbessern Sie. Vergleichen Sie danach mit Ihrem Partner.

a) $x^3=4x\,|:x$, also $x^2=4$ und $x=\pm 2$

b) $(x-2)(x+5)=3$, also $x=2$ oder $x=-5$

c) $\sqrt{x+2}=x$, quadrieren: $x^2-x-2=0$, also $x=2$ oder $x=-1$

d) $x^2=-9$, also $x=\pm 3$

★ *Pflicht · ca. 6 Min.*

Stufe 2 · Anwenden ■■□□

Standardaufgaben ohne vorgegebene Schritte. Sprungaufgabe B fehlerfrei gelöst? Dann weiter mit Stufe 3.

Sprungaufgabe B:

Lösen Sie die Gleichungen.

a) $\frac{2}{x}+\frac{1}{x-1}=2$

b) $\sqrt{2x+3}=x$

Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 3

Aufgabe 4 ★:

Lösen Sie ohne Taschenrechner.

a) $2x^2-3x-2=0$

b) $x^2+4x+5=0$

c) $9x^2-6x+1=0$

d) $(x^2-4)(x^2+1)=0$

e) $x^4-16=0$

f) $\frac{1}{2}x^2-2x=0$

★ *Pflicht · ca. 8 Min.*

Aufgabe 5 ★:

Lösen Sie die Bruch- und Wurzelgleichungen. Geben Sie zuerst die Definitionsmenge an und machen Sie die Probe.

a) $\frac{x+3}{x-1}=x$

b) $\frac{4}{x^2}=1+\frac{3}{x}$

c) $\sqrt{x}+2=x$

★ *Pflicht · ca. 8 Min.*

Stufe 3 · Vernetzen ■■■□

Sachzusammenhänge, Begründungen und Verbindungen zu anderen Themen. Sprungaufgabe C fehlerfrei? Dann weiter mit Stufe 4.

Sprungaufgabe C:

Für welche Werte von k hat die Gleichung $x^2+k\,x+4=0$ genau eine Lösung?

Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 4

Aufgabe 6 ★:

Gegeben sind $f(x)=x^3-2\,x^2$ und $g(x)=3\,x$.

a) Berechnen Sie die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f und g.

b) Geben Sie die Schnittpunkte an.

c) Ihr Partner prüft Ihre Schnittpunkte durch Einsetzen in beide Funktionen. Erklären Sie ihm, warum man nicht durch x teilen darf.

★ *Pflicht · ca. 8 Min.*

Aufgabe 7 ★:

Ein Ball wird geworfen. Seine Höhe über dem Boden ist $h(t)=-5\,t^2+10\,t+15$ (t in s, h in m).

a) Wann landet der Ball?

b) Wann ist der Ball genau 20 m hoch? Was fällt Ihnen auf?

c) Erreicht der Ball eine Höhe von 25 m? Begründen Sie.

★ *Pflicht · ca. 7 Min.*

Stufe 4 · Meistern ■■■■

Abiturniveau, Teil A (ohne Hilfsmittel) – zur Differenzierung oder als Hausaufgabe.

Aufgabe 8:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=x^4-5\,x^2+4$, $x\in R$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f. (3 BE)

b) Begründen Sie ohne Rechnung, dass der Graph von f symmetrisch zur y-Achse ist. (1 BE)

c) Bestimmen Sie alle x, für die $f(x)=4$ gilt. (2 BE)

d) Bestimmen Sie den Wert von c, für den die Gleichung $f(x)=c$ genau drei Lösungen hat. (2 BE)

Differenzierung · ca. 15 Min. · Teil A, 8 BE

Zum Weiterdenken:

Warum hat jede Gleichung $x^3+b\,x^2+c\,x+d=0$ mindestens eine reelle Lösung? Denken Sie an den Verlauf des Graphen für $x\to\pm\infty$.