

AB 1 · Terme, Brüche, Potenzen

Datum:

Abi

Kurz erklärt

Hinter fast jeder Ableitung, Stammfunktion und Nullstelle im Abitur steckt eine Termumformung. Wer hier sicher ist, spart im hilfsmittelfreien Teil A viel Zeit und vermeidet Folgefehler. Drei Werkzeuge reichen:

Potenzgesetze

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $\quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\quad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ $\quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ $\quad a^0 = 1$

Binomische Formeln und Ausklammern

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Ausklammern: $6x^3 - 9x^2 = 3x^2(2x-3)$ – Kontrolle durch Ausmultiplizieren.

Brüche: Kürzen nur aus **Produkten**: $\frac{x^2+x}{x} = \frac{x(x+1)}{x} = x+1$ für $x \neq 0$. In $\frac{x+1}{x}$ darf man nicht kürzen (Summe!).

Addieren: erst auf den Hauptnenner bringen: $\frac{1}{x} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3x} + \frac{x}{3x} = \frac{3+x}{3x}$.

Auftrag 1:

Erklären Sie sich gegenseitig in je einer Minute, warum $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ gilt (Tipp: Berechnen Sie $\frac{a^3}{a^5}$ auf zwei Wegen) und warum man in $\frac{x+3}{3}$ nicht kürzen darf. Wer zuhört, achtet auf die Schlüsselwörter **Produkt**, **Summe** und **Exponent**.

★ *Pflicht · ca. 3 Min.*

Stufe 1 · Verstehen ■□□□

Starten Sie mit der Sprungaufgabe A. Fehlerfrei gelöst? Dann weiter mit Stufe 2 – sonst führen Sie die Beispiele zum Ziel.

Sprungaufgabe A:

Vereinfachen Sie so weit wie möglich.

a) $\frac{x^5 \cdot x^{-2}}{x^2}$ $\quad$ b) $(2x-3)^2$ $\quad$ c) $\frac{3}{x} - \frac{1}{2x}$ $\quad$ d) $\frac{4}{\sqrt{x}}$ als Potenz von x

Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 2

Beispiel 1 (vollständig):

Vereinfachen Sie $\frac{x^3 \cdot \sqrt{x}}{x^{-1}}$.

Wurzel als Potenz schreiben: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

Zähler zusammenfassen (Exponenten addieren): $x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{2}}$

Durch x^{-1} teilen (Exponenten subtrahieren): $\frac{x^{\frac{7}{2}}}{x^{-1}} = x^{\frac{7}{2}-(-1)} = x^{\frac{9}{2}}$

Ergebnis: $x^{\frac{9}{2}} = x^4 \cdot \sqrt{x}$

Aufgabe 1 ★:

Vereinfachen Sie wie in Beispiel 1.

a) $\frac{x^4 \cdot \sqrt{x}}{x^2}$

b) $\frac{a^5 \cdot a^{-1}}{\sqrt[3]{a}}$

★ Pflicht · ca. 4 Min.

Beispiel 2 (mit Lücken):

Faktorisieren Sie $2x^3 - 8x^2 + 8x$.

Gemeinsamen Faktor ausklammern: $2x^3 - 8x^2 + 8x = 2x \cdot (\ \square\ - 4x + \square\ )$

Klammer mit 2. binomischer Formel: $x^2 - 4x + 4 = (\ x - \square\ )^2$

Ergebnis: $2x^3 - 8x^2 + 8x = \square \cdot (x - 2)^2$

Aufgabe 2 ★:

Faktorisieren Sie so weit wie möglich.

a) $3x^3 + 12x^2 + 12x$

b) $5x^4 - 20x^2$

★ Pflicht · ca. 4 Min.

Aufgabe 3 ★ – Fehler-Detektiv:

Lea hat Terme umgeformt. Finden Sie in jeder Zeile den Fehler, erklären Sie ihn in einem Satz und verbessern Sie. Vergleichen Sie danach mit Ihrem Partner.

a) $(x+3)^2 = x^2 + 9$

b) $\frac{x^2+4}{x} = x + 4$

c) $x^3 \cdot x^4 = x^{12}$

d) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{2}{x+2}$

★ Pflicht · ca. 6 Min.

Stufe 2 · Anwenden ■■□□

Standardaufgaben ohne vorgegebene Schritte. Sprungaufgabe B fehlerfrei gelöst? Dann weiter mit Stufe 3.

Sprungaufgabe B:

Vereinfachen Sie.

a) $\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1}$

b) $\frac{x^2-9}{2x+6}$

c) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 3

Aufgabe 4 ★:

Schreiben Sie den Term als Summe von Potenzen von x. Diese Form brauchen Sie zum Ableiten und für Stammfunktionen.

a) $\frac{x^3-2x}{x}$ b) $\frac{4+x^2}{x^2}$ c) $\frac{3x^2+\sqrt{x}}{x}$ d) $\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}$

★ Pflicht · ca. 8 Min.

Aufgabe 5 ★:

Fassen Sie zu einem Bruch zusammen und vereinfachen Sie.

a) $\frac{1}{x}+\frac{x}{x+1}$ b) $\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}$ c) $\frac{x}{x-2}-\frac{4}{x^2-2x}$

★ Pflicht · ca. 7 Min.

Stufe 3 · Vernetzen ■■■□

Sachzusammenhänge, Begründungen und Verbindungen zu anderen Themen. Sprungaufgabe C fehlerfrei? Dann weiter mit Stufe 4.

Sprungaufgabe C:

Zeigen Sie, dass $\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}=e^x-1$ für alle $x \in R$ gilt.

Sprungtest · ca. 4 Min. · fehlerfrei? → weiter mit Stufe 4

Aufgabe 6 ★:

Gegeben ist $f(x)=\frac{(2x-1)^2}{x}$ mit $x \neq 0$.

a) Zeigen Sie: $f(x)=4x-4+\frac{1}{x}$.

b) Leiten Sie die Form aus a) ab. Zeigen Sie, dass $f'(x)=\frac{(2x-1)(2x+1)}{x^2}$ gilt, und bestimmen Sie damit die Nullstellen von f'.

c) Erklären Sie Ihrem Partner, warum für Nullstellen die faktorisierte Form praktischer ist als die Summenform.

★ Pflicht · ca. 10 Min.

Aufgabe 7 ★:

Bei einem Würfel mit Kantenlänge a wird jede Kante um $10\,\%$ verlängert.

a) Um wie viel Prozent nehmen Oberfläche und Volumen zu? Begründen Sie mit einem Potenzgesetz.

b) Mit welchem Faktor muss man die Kanten verlängern, damit sich das Volumen verdoppelt? Geben Sie den Faktor exakt an.

★ Pflicht · ca. 6 Min.

Stufe 4 · Meistern

Abiturniveau, Teil A (ohne Hilfsmittel) – zur Differenzierung oder als Hausaufgabe.

Aufgabe 8:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-2x}$ und maximaler Definitionsmenge D_f.

a) Geben Sie D_f an und zeigen Sie, dass $f(x)=\frac{x+2}{x}$ für alle $x \in D_f$ gilt. (3 BE)

b) Geben Sie die Nullstelle von f sowie die Gleichungen der Asymptoten des Graphen von f an. (3 BE)

c) Zeigen Sie, dass $f(x)=1+\frac{2}{x}$ gilt, und begründen Sie damit, dass der Graph von f für $x>0$ oberhalb der Geraden $y=1$ verläuft. (2 BE)

Differenzierung · ca. 15 Min. · Teil A, 8 BE

Zum Weiterdenken:

Ist $0,\overline{9}=1$? Setzen Sie $x=0,\overline{9}$ und berechnen Sie $10x-x$.